

1.1.1 Proč a jak se učit matematiku

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: Toto je stručný přepis první hodiny v nové třídě. Ve skutečné hodině se samozřejmě představím a seznámím se se všemi žáky. Pak si třídu vyfotografuji v lavicích, tak jak sedí, abych se mohl podle zasedacího pořádku naučit jejich jména. Poté žáky krátce seznámím s výsledky vstupního testu (v posledních letech vždy tragédie). Pak si povídáme, jak je naznačeno níže. Postupujeme tak, abychom dopovídali do konce, body k učení je možné brát hodně stručně, protože si z toho žáci stejně moc nezapamatují (a ještě méně vezmou k srdci). Daleko účinnější je konkrétní rady trvale připomínat na vhodných místech v hodinách. Podrobněji je problematika správného učení popsána v úvodu učebnice.

Důvodů, proč se učit matematiku je mnoho na více úrovních. Začneme od nejnižších:

- kvůli známám a rodičům,
- současné žáky středních škol možná čeká povinná státní maturita z matematiky,
- v mnoha profesích je znalost matematiky nutností, v mnoha velkou výhodou,
- matematika tříbí logické myšlení, posiluje paměť,
- když jí rozumíme, je matematika neobyčejně krásná.

Proč tolik lidí matematiku neumí? Proč výuka matematiky tak často nefunguje?

- **Matematika se nedá přelévát z jedné hlavy do druhé:** Matematiku si musí ve své hlavě každý odpřemýšlet sám (zde je slabina klasické frontální výuky, při které mnozí žáci jen pasivně opisují a ve skutečnosti se nic nenaučí, protože jejich mozek nepracuje) $\Rightarrow$ proto se budeme snažit, aby hlavy žáků měly co nejvíce příležitostí k tomu, aby pracovaly (nejlépe samostatně), budeme zkoušet, bádát a dělat chyby. Úkolem učitele není předžvýkat látku tak, aby ji žák mohl pasivně bez duševní námahy převzít, ale naopak připravit takové situace, ve kterých bude žák muset co nejvíce přemýšlet (proto to bude občas vypadat, že učitel vlastně nic nevysvětlil).
- **Matematika se nedá učit bez přemýšlení a rozhodování:** Mnozí učitelé se snaží žákům ulehčit situaci tak, že připraví postupy, které je možné provádět bez přemýšlení (paměťové učení násobilky, trojúhelníčky, schémátka se šipkami), snaží co nejvíce konkretizovat, opakují stále stejné příklady $\Rightarrow$ my budeme postupovat přesně opačně (příklady budeme řešit co nejrozdílnější, v písémkách nebudou jen stejné příklady jako v hodinách, budeme vyhledávat situace, kde se každý musí rozhodnout).
- **Matematika se nedá učit pasivním sledováním:** Stejně jako se nikdo nenaučil hrát fotbal sledováním Ligy mistrů v televizi, nikdo se ještě nenaučil matematiku pasivním opisováním příkladů z tabule $\Rightarrow$ tabule bude hrát jinou roli, než je obvyklé. Nepůjde o místo, kde je uvedeno to, co má mít každý v sešitě, místo, které je centrem hodiny. Centrum hodiny bude mít každý žák ve svém sešitě, tabule slouží pouze k výkladu, kontrolám nebo upřesněním. Objevování a procvičování budeme provádět v sešitech.

Neexistuje žádný způsob, jak se naučit matematiku (i cokoliv jiného) zadarmo, neúčelná námaha je však také k ničemu. To podstatné se děje ve Vaší hlavě, kterou učení musí měnit.

Dodatek: Slavný řecký matematik Euklides, autor první axiomatické učebnice matematiky, prý odpověděl egyptskému králi Ptolemaiovi, který se dožadoval z titulu své funkce nějaké lehčí cesty k naučení matematiky, že žádná královská cesta k matematice neexistuje. Od starověku se na tom nic nezměnilo.

Co by mělo učení obsahovat:

a) pochopení

- Pochopit neznamená se s něčím smířit, umět to zopakovat, pochopit znamená poznat, že to nejde jinak, že je to rozumné a jasné, pochopit znamená umět přeformulovat, použít.

Pseudopřavidla (postupy na bezdůvodné přesuny písmenek z jednoho místa na druhé) nemají nic společného s matematikou ani s pochopením.

V případě problémů je dobré:

- najít místo, kde jsme se ztratili a přestalo to být jasné,
- nebo zformulovat, jak by to mělo být jinak (správně podle nás, ne podle učebnice nebo učitele).

Pochopení je důvodem, proč je třeba řešit příklady samostatně. Z problémů a chyb se dá poznat, zda chápeme a kde je problém.

b) pamatování

"Všechno" se sice dá najít na internetu, ale používat dokážeme pouze informace, o kterých víme $\Rightarrow$ při řešení problémů nebo snaze o pochopení nové látky jsme odkázáni na informace, které si pamatujeme, nebo o nich alespoň víme a jsme schopni si je rychle obnovit. Navíc většina odborných článků na internetu je psána těmi, kteří rozumí, pro ty, kteří rozumí.

Pár rad, jak si zapamatovat informace dlouhodobě:

- opakovat (opakování je matkou moudrosti),
- vnímat je, chápat je, vnitřně je považovat za důležité a zapamatováníhodné (většina studentů používá školní informace pouze k ukájení učitelů, což jejich mozek vůbec nemotivuje, aby si je zapamatoval),
- zkoušet si je odvodit z jiných informací,
- spojovat je s ostatními informacemi (viz budování systému níže),
- omezovat jejich počet (čeho je moc, toho je příliš a do hlavy se to nevejde),
- sledovat jejich opakující se výskyt v dalším studiu (co se opakuje, je potřeba si pamatovat).

Nejdůležitější věci k zapamatování jsou v učebnici vyznačeny:

- **Červené rámečky:** potřeba umět vždy, není možné je psát na oficiální tahák.
- **Modré rámečky:** potřeba umět do konce oddílu, pak je možné je napsat na oficiální tahák.

c) třídění

Nová informace $\Rightarrow$ dobré porovnání s tím, co víme:

- informace je známá $\Rightarrow$ nemusíme si ji pamatovat, ujišťuje nás v tom, co už víme,
- informace je nová $\Rightarrow$ zapojujeme ji do toho, co už víme.

Snažíme se zapamatovat hlavně to, co je nové a překvapující (na co bychom nepřišli sami).

V čem je důležitost informace:

- 1) kolik věcí se z ní dá odvodit,
- 2) jak často se na ni odkazuje.

Čím větší skóre, tím větší nutnost si ji zapamatovat.

d) budování systému

Izolované informace nejsou moc použitelné. Daleko užitečnější jsou v systému. Jak vybudovat z informací systém?

- Jak souvisí informace s ostatními (vyplývání, generalizace, zobecnění, speciální případ ...)?
- Není možné ji strčit do nějaké generalizace?
- Jak je možné ji odvodit z ostatních nebo ostatní z ní?
- Je nutné si ji pamatovat?

Dobře vybudovaný systém umožňuje dobře zvládnout větší množství látky (čtvrletky a zkoušky na VŠ).

K čemu jsou příklady v matematice: nejsou určeny k zapamatování (nejsou informacemi ve smyslu používaném výše). Slouží na procvičování využití naučených informací. Z toho plyne, že do systému se z nich nezabudovává nic (zejména pokud je člověk vyřeší sám), maximálně pouze „fígle“, které nás při řešení nenapadly.

e) zkoušení a opravování chyb

Není pravda, že nejlépe to umí ten, kdo dokáže bez chyby zopakovat něco, co je předloženo jako „správný postup“.

- Ne vždy existuje něco jako „správný postup“, mnohdy je postupů víc, některé někdy lepší, některé horší, mnohdy vlastně rovnocenné.
- Správné řešení je mnohdy chybně vnímáno jako nedílný celek. Taková představa často zásadně znemožňuje samostatně hledat řešení, protože většinou je ho možné objevit postupně v několika částech tím, že zkusíme zjistit alespoň něco.
- Vlastní nápady je nutné testovat.

Metody hledání chyb závisí na tom, zda známe výsledek nebo ne a na kvalitě systému, který jsme z informací vybudovali (čím kvalitnější a bohatší systém, tím více existuje možností kontroly). Existuje jich mnoho v závislosti na situaci. Nejčastější:

- testování výsledku, zda má vlastnosti vyplývající z postavení zadání v systému (souladnosti, znaménka, rozsah hodnot apod.),
- testování pomocí dosažení extrémních hodnot,
- základním postupem při hledání chyb v příkladech, u kterých známe správný výsledek (sbírky), je opětovný výpočet bez možnosti sledovat původní postup. Tak odhalíme většinu chyb z nepozornosti a přepisů (hledáme v místě, kde se oba postupy začínají lišit).

f) řešení příkladů

Příklady nejsou cílem, pouze prostředkem na:

- ověření toho, co bychom měli umět,
- procvičení mechanických dovedností (výpočty, úpravy výrazů, ...),
- možnost objevit nové poznatky.

V ideálním případě bychom při řešení příkladu měli zjistit, že jsme se moc nového nenaučili.

g) samostatnost

Jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly, učení je to, co probíhá v hlavě. Z toho vyplývá, že není možné, aby někdo jiný (osoba, učebnice, sešit) sejmul z žáka námahu, kterou jeho mozek musí projít, aby se matematiku naučil. Jde zejména o dva zlozvyky:

- při pokusu o pochopení musí pracovat vlastní hlava. Vysvětlování z vnějšku musí přijít až ve chvíli, kdy si nevíte rady,

- při učení nestačí koukat do učebnice (sešitu) a spokojeně si brumlat, že je to jasné. Je potřeba přečíst zadání a počítat samostatně. Je to daleko větší problém a často se ukáže, že tak jasné to zase nebylo.

Potřeby:

- velký (A4) nelinkovaný sešit,
- kalkulačka: budeme se učit postupně na kalkulačce, vyčíslení výrazů (+, -, *, /, mocniny, odmocniny, závorky), použití matematických funkcí ($\sin$, $\cos$, tg , $\log$, $\ln$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, tg^{-1}), řešení rovnic a jejich soustav, statistika (jedno a dvou rozměrná), kombinatorické funkce
- rýsovací potřeby: trojúhelník s ryskou, další libovolné pravítko, kružítko, tužky 2 a 3, úhloměr (až ve druháku na planimetrii)
- sbírka příkladů: Matematika příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Petáková J. (zkráceně označovaná pouze jménem autorky jako Petáková)

Dodatek: K pořizování kalkulaček. Kalkulačka je i v současné době tabletů a chytrých mobilů nezbytností. Běžně dostupné freewarové kalkulačky neobsahují všechny potřebné funkce a jejich ovládání je daleko těžkopádnější než u normální kalkulačky. Navíc kalkulačky je možné používat i při písémkách, kde jsou mobily v naprosté většině případů z pochopitelných důvodů zakázány. Já osobně používám (a učebnice je podle nich psaná) kalkulačky CASIO, konkrétně dnes typ CASIO fx-991 CE X (nejvyšší model v řadě klasických vědeckých kalkulaček), dříve jsem používal typ CASIO fx-570MS. V ovládání těchto kalkulaček jsem nejběhlejší a příklady ovládání platí nejpřesněji právě pro kalkulačky tohoto výrobce (v učebnici jsou většinou popsány postupy pro poslední tři generace kalkulaček CASIO). Přesto jsem naprostou většinu funkcí zmiňovaných v učebnici dokázal rozchodit i na kalkulačce jiného výrobce. Na základní využití stačí nejnižší kalkulačka v řadě, všechny funkce, které si ukazujeme, obsahují až kalkulačky nejvyšší. V hodinách i písémkách platí: “co jsme si ukázali, to můžete používat. Pokud to Vaše kalkulačka neumí, musíte počítat ručně.”

Nákup grafické kalkulačky považuji za zbytečnost. Každá má vlastní způsob ovládání, stojí poměrně hodně peněz a funkce, které poskytují, je možné nalézt u počítačových programů, navíc na větší ploše monitoru nebo tabletu. Pokud hodláte používat starou kalkulačku, zkontrolujte si, jakým způsobem se na ní počítá například druhá odmocnina. Pokud Vaše kalkulačka vyžaduje obrácenou (maďarskou) notaci (při výpočtu $\sqrt{2}$ se nejdříve stiskne 2 a pak $\sqrt{}$), je lepší koupit novou kalkulačku, protože složitější výpočty na takové kalkulačce vyžadují značnou představivost a dělá se v nich obrovské množství chyb (navíc je kalkulačka opravdu stará, protože obrácená notace se nepoužívá minimálně 30 let). Dalším výrazným skokem usnadňujícím použití kalkulaček jsou displeje, které umožňují zadávat výrazy ve tvaru zlomků (záležitost cca posledních 15 – 20 let). Studenti na nich dělají daleko méně chyb u zadávání složitějších výrazů.

Shrnutí: Matematika se dá naučit jedině samostatným přemýšlením.